

Εξισώσεις και
...Ανάλυση
 $\Leftrightarrow$ Ανάλυση και
...εξισώσεις

Μανόλη Χ.Φασουλά
Μαθηματικού

Πολλές φορές ζητείται να λυθεί μια "περίεργη" εξίσωση, εννοώντας με τον όρο "περίεργη", ότι η λύση της δεν εμπίπτει σε ότι έχει πέσει στην αντίληψη μας από τις τάξεις του γυμνασίου και τις Α,Β τάξεις του λυκείου. Στις περιπτώσεις αυτές έρχεται η Ανάλυση, από την Γ' λυκείου και μας ...λύνει τα χέρια, όπως διεξοδικά θα δούμε παρακάτω, με κάποιες βασικές προτάσεις και μεθοδολογίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μια ρίζα
--

Απόδειξη

Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ . Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, οπότε $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Επειδή $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 0 < 0$, άτοπο, επομένως η εξίσωση $f(x)=0$, έχει το πολύ μια ρίζα στο Δ .

Παρόμοια εργαζόμαστε αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Σχόλιο

Η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω πρότασης είναι: Η C_f κάθε γνησίως μονότονης συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

1^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Όταν ζητείται να λυθεί μια "περίεργη" εξίσωση, με κατάλληλους μετασχηματισμούς θα την φέρνουμε στη μορφή $f(x)=0$, όπου f είναι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση. Θα εντοπίζουμε μια προφανή ρίζα ρ, οπότε σύμφωνα με την 1^η πρόταση, δεν θα υπάρχει άλλη ρίζα για την εξίσωση.

1^ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1} + x^5 = 3 - x$ (1)

Λύση

$H(1) \Leftrightarrow e^{x-1} + x^5 - 3 + x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, όπου $f(x) = e^{x-1} + x^5 - 3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x-1} + 5x^4 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(1)=e^0+1+1-3=0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα της (1) και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, το 1 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

2ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x+1) = \frac{1}{x+1} - 1, x > -1$ (1)

Λύση

Η (1) $\Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, όπου $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + 1, x > -1$. Είναι $f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, για κάθε $x > -1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$. Τώρα $f(0) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$, δηλαδή $x=0$ ρίζα της εξίσωσης και επειδή f γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, το 0 είναι μοναδική λύση της εξίσωσης.

3ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $2\ln x = \frac{x^2-1}{x}, x > 0$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά $2\ln x = \frac{x^2-1}{x} \Leftrightarrow 2x\ln x = x^2 - 1 \Leftrightarrow 2x\ln x - x^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow f(x) = 0$, όπου $f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1$ με $x > 0$.

Είναι $f(1) = 0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης. Βρίσκουμε $f'(x) =$

$2\ln x + 2 - 2x$ και $f''(x) = \frac{2(1-x)}{x}$ με $x > 0$, και επειδή $f''(x) > 0$ όταν

$x \in (0, 1)$ η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$, ενώ $f''(x) < 0$, όταν $x \in (1, +\infty)$ η $f'(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Τώρα με $0 < x < 1 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(x) < f'(1) = 0$, οπότε $f'(x) < 0$

Με $x > 1 \xRightarrow{f' \downarrow} f'(x) < f'(1) = 0$, οπότε $f'(x) < 0$

Τελικά η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε το 1 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

4^ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = e$, με $x > 0$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\ln x = \frac{e}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{e}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, όπου $f(x) = \ln x - \frac{e}{x}$ με $x > 0$. Είναι $f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 0$, δηλαδή $x = e$ ρίζα της εξίσωσης και επειδή $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε $x = e$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Εφαρμογή

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

- | | |
|---------------------------------------|-------------|
| 1. $x \ln x = 1 - x$ | Απ. $x = 1$ |
| 2. $\ln x = 5 - 3x^2 - 2x$ | Απ. $x = 1$ |
| 3. $x^2 - 4x + 3 = 6 \ln \frac{1}{x}$ | Απ. $x = 1$ |
| 4. $5e^x = x^2 + 4x + 5$ | Απ. $x = 0$ |

2^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη είναι και 1-1, δηλαδή αν $f: A \rightarrow R$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$f: 1-1 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Η παραπάνω ισοδυναμία μας εξυπηρετεί στη λύση "πολύπλοκων" εξισώσεων. Συγκεκριμένα για να λύσουμε μια εξίσωση που περιέχει συνάρτηση f που είναι 1-1, εργαζόμαστε ως εξής.

Με κατάλληλες ισοδυναμίες οδηγούμε την εξίσωση στη μορφή:

$f(A) = f(B)$, όπου A, B παραστάσεις που περιέχουν τον άγνωστο της εξίσωσης. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει $A = B$ και τα πράγματα απλουστεύονται.

1ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha^x + x^3 + x$, με $\alpha > 1$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^{x+1} - \alpha^{2x-3} - x + 4 = (2x-3)^3 - (x+1)^3$

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = \alpha^{x+1} \ln \alpha + 3x^2 + 1 > 0$, αφού $\alpha > 1$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1.

ii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\alpha^{x+1} - \alpha^{2x-3} - x + 4 = (2x-3)^3 - (x+1)^3 \Leftrightarrow \alpha^{x+1} + (x+1)^3 + (x+1) = \alpha^{2x-3} + (2x-3)^3 +$$

$$(2x-3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(2x-3) \xrightarrow{f \text{ 1-1}} x+1 = 2x-3 \Leftrightarrow x=4.$$

2ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-1} - e^{x-1} = x - x^2$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $e^{x^2-1} + x^2 - 1 = e^{x-1} + x - 1$

$$\Leftrightarrow f(x^2-1) = f(x-1),$$

όπου $f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως 1-1. Άρα η εξίσωση $f(x^2-1) = f(x-1) \Leftrightarrow x^2-1 = x-1$

$$x=0 \text{ ή } x=1$$

3ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x + \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2-3x+2) = \ln \frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}$

Θέμα πανελληνίων 2010

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} > 0$, άρα η f είναι και 1-1 .

ii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$2x^2-6x+4=\ln[(3x-2)^2+1]-\ln(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2+\ln(x^4+1)=\ln[(3x-2)^2+1]+2(3x-2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2)=f(3x-2) \Leftrightarrow (f: 1-1) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=2$$

4ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f

ii) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{e^x}{x^2+2x\sin x+2-\eta\mu^2 x} = \frac{e^{1-\sin x}}{2}$

Λύση

i) Βρίσκουμε $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$ και επειδή f συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι και γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1

ii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{e^x}{x^2+2x\sin x+2-1+\sin^2 x} = \frac{e}{2e^{\sin x}} \Leftrightarrow \frac{e^{x+\sin x}}{(x+\sin x)^2} = \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x+\sin x) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x+\sin x = 1 \Leftrightarrow x + \sin x - 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x + \sin x - 1$, με $g'(x) = 1 - \eta\mu x \geq 0$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και g συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $g(0)=0$, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης και μάλιστα μοναδική αφού g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εφαρμογές

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2x^2 + \sin(3|x|) = 6|x| + \sin x^2$. Υπ. $x=-3, x=0, x=3$

ii) $e^{3x-3} - (2-x^3)^3 = 4-2x^3-2e^{x-1}$ Υπ. $x=1$

2. Έστω συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f \circ g$ 1-1. Να αποδείξετε ότι και η g είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση

$g(f(x) + x^3 - 3x^2) = g(f(x) + 3 - 3x)$. Υπ. $x = 1 + \sqrt[3]{2}$

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$ είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu x = (\sqrt{e} + \frac{1}{2}) \cdot e^{\eta \mu x}$.

Υπ. $x = 2\kappa\pi + \pi/6$ ή $x = 2\kappa\pi + 5\pi/6, \kappa \in \mathbb{Z}$

4. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2) + f(1-x^4) = f(x^4) + f(1-x),$$

όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Υπ. Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - f(1-x), x = -1, 0, 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Αν $f : A \rightarrow B$ συνάρτηση 1-1, τότε ορίζεται η f^{-1} και επειδή οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $\psi = x$ (διχοτόμο 1^{ου}-3^{ου} τεταρτημορίου), οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

Γεωμετρικά η παραπάνω πρόταση δηλώνει ότι τα κοινά σημεία της C_f με την $\psi = x$, είναι τα ίδια με τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $\psi = x$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3

Αν $f : A \rightarrow B$ συνάρτηση 1-1, τότε ορίζεται η f^{-1} και αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

$$f(x) = x$$

$$f^{-1}(x) = x$$

είναι ισοδύναμες, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = f(x)$$

Γεωμετρικά η παραπάνω πρόταση δηλώνει :Τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι τα ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την $\psi=x$ και της $C_{f^{-1}}$ με την $\psi=x$

Προσοχή!

Αν η f δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε δεν ισχύει η παραπάνω ισοδυναμία,που γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$,που δεν ανήκουν στην $\psi=x$

Απόδειξη

Ορθό

Έστω κ μια λύση της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$,που σημαίνει ότι το σημείο $A(\kappa,\lambda)$ είναι κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$, δηλαδή

$f(\kappa)=\lambda$ και $f^{-1}(\kappa)=\lambda \Leftrightarrow f(\lambda)=\kappa$. Θα αποδείξουμε ότι το κ είναι

λύση της εξίσωσης $f(x)=x \Leftrightarrow f(\kappa)=\kappa \Leftrightarrow \kappa=\lambda$

Θα εργαστούμε με άτοπο. Έστω ότι $\kappa \neq \lambda$

Αν $\kappa < \lambda \xrightarrow{f\uparrow} f(\kappa) < f(\lambda) \Leftrightarrow \lambda < \kappa$ άτοπο

Αν $\kappa > \lambda \xrightarrow{f\uparrow} f(\kappa) > f(\lambda) \Leftrightarrow \lambda > \kappa$ άτοπο.

Αντίστροφο

Αν κ μια λύση της $f(x)=x \Leftrightarrow f(\kappa)=\kappa \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa)=\kappa$ οπότε $f^{-1}(\kappa)=f(\kappa)$,δηλαδή το κ είναι λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x)=f(x)$.

Σχόλιο

Η παραπάνω πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα για την εύρεση των κοινών σημείων των C_f και $C_{f^{-1}}$,αντί να λύνουμε την εξίσωση $f^{-1}(x)=f(x)$,μπορούμε να λύνουμε μια εκ των $f^{-1}(x)=x$ ή $f(x)=x$,που όπως καταλαβαίνουμε μας λύνει τα χέρια όταν δεν δίνεται ο τύπος της f ή όταν δεν μπορεί να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}

ΠΡΟΤΑΣΗ 4

Αν $f:A \rightarrow R$ συνάρτηση γνησίως μονότονη ,τότε και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.Θα αποδείξουμε ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $\psi_1, \psi_2 \in Df^{-1}$ με $\psi_1 < \psi_2$. Θα δειχτεί ότι $f^{-1}(\psi_1) < f^{-1}(\psi_2)$.

Έστω ότι $f^{-1}(\psi_1) \geq f^{-1}(\psi_2) \xrightarrow{f^\uparrow} f(f^{-1}(\psi_1)) \geq f(f^{-1}(\psi_2)) \Leftrightarrow \psi_1 \geq \psi_2$
 άτοπο αφού $\psi_1 < \psi_2$

3η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Για να λύνουμε εξισώσεις που περιέχουν τις συναρτήσεις f και f^{-1} στηρίζομαστε στις προτάσεις 2,3 και 4 και κάνουμε συχνή εφαρμογή της ισοδυναμίας :

$$f(x) = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = x$$

1ο παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονη με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η C_f περνά από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,4)$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(2 + f(x^2 - 3)) = 2.$$

Λύση

Αφού η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι και 1-1. Ακόμη ισχύουν οι σχέσεις $f(1)=2$ και $f(2)=4$.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$f^{-1}(2 + f(x^2 - 3)) = 2 \Leftrightarrow$$

$$f(2) = 2 + f(x^2 - 3) \Leftrightarrow$$

$$4 = 2 + f(x^2 - 3) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 3) = 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 3) = f(1) \xrightarrow{f:1-1} x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

2ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = -3x^2 - 2 < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε και 1-1, δηλαδή η f αντιστρέφεται.

Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της f^{-1} , σύμφωνα με την πρόταση 2, έχουμε $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow -x^3 - 2x + 14 = x \Leftrightarrow$

$x^3 + 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow (Horner) \quad (x-2)(x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x=2$, αφού η εξίσωση $x^2 + 2x + 7 = 0$ είναι αδύνατη.

3ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να ορίσετε την f^{-1} και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $\psi = x$

Λύση

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$ οπότε

$$2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$$

$$\underline{\hspace{10em}} +$$

$2f^3(x_1) + f(x_1) = 2f^3(x_2) + f(x_2)$ και από (1) $\Rightarrow x_1 + 16 = x_2 + 16$ άρα $x_1 = x_2$, δηλαδή η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέψιμη.

Αν $f(x) = \psi \Leftrightarrow f^{-1}(\psi) = x$ και από (1) $2\psi^3 + \psi = f^{-1}(\psi) + 16 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(\psi) = 2\psi^3 + \psi - 16$ ή $f^{-1}(x) = 2x^3 + x - 16$.

Τώρα για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την $\psi = x$, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x$, αλλά δεν γνωρίζουμε τον τύπο της f .

Σύμφωνα με την πρόταση 2 ισχύει:

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 16 = x \Leftrightarrow 2x^3 = 16 \text{ ή } x = 2$$

Άρα η C_f έχει με την $\psi = x$ κοινό σημείο μόνο το $(2, 2)$.

4ο παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+x-1$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{x^5+x^3-2}+3=2f^{-1}(e+2) - x^5-x^3$$

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = e^{x-2} + 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, δηλαδή αντιστρέψιμη.

ii) Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = f(x)$ και σύμφωνα με την πρόταση 3, ισοδύναμα

$f(x) = x \Leftrightarrow e^{x-2} + x - 1 = x \Leftrightarrow x = 2$. Άρα κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι μόνο το $M(2,2)$.

iii) Επειδή $f(3)=e+2 \Leftrightarrow f^{-1}(e+2)=3$, η εξίσωση ισοδυναμεί με :

$$e^{x^5+x^3-2}+3+x^5+x^3-1=2 \Leftrightarrow$$

$$f(x^5+x^3) = f(2) \xLeftrightarrow f:1-1 x^5+x^3=2 \Leftrightarrow x=1$$

Εφαρμογές

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(x) + 2x^3 + 3x = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2(f^{-1}(x))^3 + 3f^{-1}(x) = e^x$

Υπ. Αποδείχνουμε ότι η f είναι $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$, βάζουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και καταλήγουμε $1-x = e^x$, οπότε $x=0$

2. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=x^7+x+128$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $\psi=x$.
 Απ. $(-2,-2)$

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $e^{f(x)-1} + 1 = x - f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $\psi = x$.

Απ. Δεν υπάρχουν

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$, αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Υπ. $f \uparrow$ στο $[2, +\infty)$ $A(2,2)$ και $B(3,3)$.

5. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $e^{f(x)} + f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την $\psi = x$ (ή να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$).

Υπ. $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow e^x + x - 2 = x \dots$

6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η C_f περνά από τα σημεία $A(1,6)$ και $B(2,4)$. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f , αν γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x) - 1) = 6$.
Απ. $x = 4$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3e^{2-x} - x + 1$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

i) Να δειχτεί ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $f^{-1}(x) = 0$

β) $f^{-1}(x+2) = x+2$

Υπ. i) f γνησ. φθίν. ii) α) $x = 3e^2 + 1$ β) $x = 0$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5
Αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $ \eta \mu x \leq x \quad (1)$ Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$, δηλαδή $\eta \mu x = x$ ή $\eta \mu x = x$, μόνο όταν $x = 0$.

Σχόλια:

1.Γεωμετρικά οι ισότητες $\eta\mu x = x$ και $\eta\mu x = -x$, μόνο όταν $x=0$, δηλώνουν ότι η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ έχει μοναδικό κοινό σημείο με τις ευθείες $\psi=x$ και $\psi=-x$, μόνο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

2.Αν στην (1) βάλουμε όπου x το $\pi/2-x$, παίρνουμε $|\eta\mu(\frac{\pi}{2}-x)| \leq |\frac{\pi}{2}-x| \Leftrightarrow |\cos x| \leq |\frac{\pi}{2}-x|$, με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\frac{\pi}{2}-x=0 \Leftrightarrow$

$x=\pi/2$. Όμοια αν βάλουμε στην (1) όπου x το $3\pi/2-x$ παίρνουμε

$|\eta\mu(\frac{3\pi}{2}-x)| \leq |3\frac{\pi}{2}-x| \Leftrightarrow |\sin x| \leq |3\frac{\pi}{2}-x|$, με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $3\frac{\pi}{2}-x=0 \Leftrightarrow x=3\pi/2$.

Όμοια αν βάλουμε στην (1) όπου x το $\pi-x$ παίρνουμε

$|\eta\mu(\pi-x)| \leq |\pi-x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq |\pi-x|$, με το ίσον να ισχύει μόνο όταν $\pi-x=0 \Leftrightarrow x=\pi$.

4η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στηριζόμενοι στην ΠΡΟΤΑΣΗ 5 και στα παραπάνω σχόλια, μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής :

$|\eta\mu f(x)| = |f(x)|$, όπου $f(x)$ παράσταση του x .

1ο παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu(x^3-4x^2+5x-2) = x^3-4x^2+5x-2$

Λύση

Θα πρέπει $x^3-4x^2+5x-2=0$. Κάνοντας σχήμα Horner με το 1 παίρνουμε

$(x-1)(x^2-3x+2) = 0 \Leftrightarrow x=1$ διπλή ρίζα ή $x=2$.

2ο παράδειγμα

Αν ισχύει η σχέση $\sin(x^3-4x) = \frac{\pi}{2}-x^3+4x$, να λύσετε την εξίσωση :

$$x^4 - 4x^2 + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Λύση

Η δοθείσα σχέση γράφεται :

$$\eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (x^3 - 4x)\right] = \frac{\pi}{2} - (x^3 - 4x), \text{ που ισχύει μόνο όταν } \frac{\pi}{2} - (x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = \frac{\pi}{2}. \text{ Η εξίσωση λοιπόν γράφεται } x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1, x = \pm 2$$

3ο παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση

$$\eta\mu[e^{3-x} - 1 - \ln(x-2)] + \ln(x-2) = \frac{1}{e^{x-3}} - 1$$

Λύση

Κατ'αρχήν πρέπει $x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\eta\mu[e^{3-x} - 1 - \ln(x-2)] + \ln(x-2) = \frac{1}{e^{x-3}} - 1$$

$$\eta\mu[e^{3-x} - 1 - \ln(x-2)] = e^{3-x} - 1 - \ln(x-2)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει μόνο όταν $e^{3-x} - 1 - \ln(x-2) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{3-x} - 1 - \ln(x-2)$ με $x > 2$. Είναι $f(3) = 0$, δηλαδή το 3 είναι ρίζα της εξίσωσης. Επίσης $f'(x) = -e^{3-x} - \frac{1}{x-2} < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$. Επομένως η $x=3$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Εφαρμογές

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

i) $\eta\mu[2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x - 5^{x+1}] = 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 2^x - 5^{x+1}$. Υπ. $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - 5 = 0$, $x=0$

ii) $\eta\mu(x \ln x + x - 1) = \ln x^x + x - 1$. Υπ. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$, $x=1$

iii) $\eta\mu[e^x(x-1) + x^3 - \frac{x^2}{2} + 1] = e^x(x-1) + x^3 - \frac{x^2}{2} + 1$. Υπ. $f(x) = e^x(x-1) + x^3 - \frac{x^2}{2} + 1$

$$f'(x) = x(e^x - 1) + 3x^2 > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, x=0$$

2. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$* \eta \mu [xf'(x) - f(x) - 2x^3] + f(x) + 2x^3 = xf'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$* \ln f(1) = f(1) - 1$$

Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (ή να αποδείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων).

$$\text{Υπ. } xf'(x) - f(x) = 2x^3 \dots f(x) = x^3$$

5^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ Το Θ.Μ.Τ. στη λύση εξισώσεων

Υπάρχει μια ομάδα εξισώσεων, που για την λύση τους ακολουθούμε την εξής πορεία:

Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα x_0

Στη συνέχεια με διπλή εφαρμογή του Θ.Μ.Τ., θα αποδείχνουμε ότι η εξίσωση είναι αδύνατη για κάθε $x \neq x_0$.

Ο τρόπος εργασίας φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$, με $x > 0$.

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η $f'(x)$.

ii) Να λυθεί η εξίσωση

$$(x+1)(e^{x^2} - 2\ln x) = x(e^x - \ln x) + e^{x^3} - 3\ln x$$

Λύση

i) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$, η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x+1)(e^{x^2} - 2\ln x) = x(e^x - \ln x) + (e^{x^3} - \ln x^3) \Leftrightarrow$$

$$(x+1)f(x^2) = xf(x) + f(x^3).$$

Το $x_0 = 1$ είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης, αφού την επαληθεύει,

$$2f(1) = 2f(1).$$

*Τώρα για κάθε $x > 1$ ισχύει $1 < x < x^2 < x^3$.

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x, x^2]$ και $[x^2, x^3]$. Επομένως θα υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x^2)$ και $\xi_2 \in (x^2, x^3)$, τέτοια

$$\text{ώστε : } f'(\xi_1) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^3 - x^2} = \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2(x-1)}.$$

$$\text{Είναι } 1 < x < \xi_1 < x^2 < \xi_2 < x^3 \xRightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x^2) - f(x)}{x(x-1)} < \frac{f(x^3) - f(x^2)}{x^2(x-1)}$$

και επειδή $x-1 > 0, x > 0$ παίρνουμε ισοδύναμα

$x[f(x^2) - f(x)] < f(x^3) - f(x^2) \Leftrightarrow (x+1)f(x^2) < xf(x) + f(x^3)$, που σημαίνει ότι στο $(1, +\infty)$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

*Για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $0 < x^3 < x^2 < x < 1$ και εφαρμόζοντας πάλι το Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[x^3, x^2]$ και $[x^2, x]$, εργαζόμενοι όπως παραπάνω, καταλήγουμε πάλι $(x+1)f(x^2) < xf(x) + f(x^3)$, δηλαδή η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(0, 1)$. Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=1$.

Εφαρμογές

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(e^x + 1)f(e^x) = f(e^{2x}) + e^x f(1).$$

Υπ. $x=0$

2. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 5^x = 6^x + 2^x$

Υπ. Αν $f(t) = t^\alpha, t > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$, Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[5, 6]$. $x=0, x=1$.

6^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το Θεώρημα Rolle στη λύση εξισώσεων

Όταν έχουμε να λύσουμε μια εξίσωση $f(x)=0$, όπου f συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in D_f$, θα βρίσκουμε μια προφανή ρίζα x_1 , θα υποθέτουμε ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα x_2 με $x_1 < x_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας) και με εφαρμογή Θ.Rolle στο $[x_1, x_2]$, θα καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η C_f περνά από το σημείο $M(2025, 0)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Λύση

Αφού η C_f περνά από το σημείο $M(2025, 0)$, θα ισχύει $f(2025)=0$, δηλαδή το 2025 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Έστω ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα x_0 , με $x_0 < 2025$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle στο $[x_0, 2025]$, άρα θα υπάρχει $\xi \in (x_0, 2025)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$, άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$. Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=2025$.

Εφαρμογές

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-1$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
Υπ. $x=0$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: [\kappa, \lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\kappa)=f(\lambda)=1$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [\kappa, \lambda]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μια ρίζα στο (κ, λ) .

Λύση εξίσωσης με τη βοήθεια ακροτάτων

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1$ με $x > 0$.

i) Να βρείτε τα ακρότατα της f

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^4) + 3f(x^2) = 8$

iv) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha + \beta) + f(2\alpha + 3\beta) = 4$.

Λύση

i) Είναι $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$, μοναδική ρίζα αφού $f'(1) = 0$ και $f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0$, οπότε $f'(x)$ γνησίως αύξουσα.

Τώρα με $x < 1 \xRightarrow{f''} f'(x) < f'(1)$, δηλαδή $f'(x) < 0$ και

$$x > 1 \xRightarrow{f''} f'(x) > f'(1), \text{ δηλαδή } f'(x) > 0.$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↓	↑

ολ.ελάχιστο

Άρα $f(x) \geq f(1) = 2$, δηλαδή η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 2$.

ii) Επειδή $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, το $f(x) = 2$ ισχύει μόνο όταν $x = 1$.

$$\text{iii) Έχουμε διαδοχικά } f(x^4) + 3f(x^2) = 8 \Leftrightarrow [f(x^4) - 2] + 3[f(x^2) - 2] = 0$$

$$\text{Όμως } f(x^4) \geq 2, \text{ οπότε } [f(x^4) - 2] \geq 0$$

$$f(x^2) \geq 2 \text{ και } [f(x^2) - 2] \geq 0.$$

$$[f(x^4) - 2] = 0 \text{ μόνο όταν } x^4 = 1 \text{ δηλαδή όταν } x = \pm 1 \text{ και}$$

$$[f(x^2) - 2] = 0 \text{ μόνο όταν } x^2 = 1 \text{ δηλαδή όταν } x = \pm 1. \text{ Τελικά } x = \pm 1$$

$$\text{iv) } f(\alpha + \beta) + f(2\alpha + 3\beta) = 4 \Leftrightarrow [f(\alpha + \beta) - 2] + [f(2\alpha + 3\beta) - 2] = 0$$

$$\text{Όμως } f(\alpha + \beta) - 2 \geq 0, \text{ το ίσον ισχύει μόνο όταν } \alpha + \beta = 0$$

$$f(2\alpha + 3\beta) - 2 \geq 0, \text{ το ίσον ισχύει μόνο όταν } 2\alpha + 3\beta = 0.$$

$$\text{Τελικά } (\alpha, \beta) = (2, -1).$$

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - (\ln x)^2$.

i) Να μελετηθεί η μονοτονία και το πρόσημο της συνάρτησης

$$g(x) = x^2 - 1 - 2x \ln x$$

ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii) Να δειχτεί ότι $(x-1)^2 \geq x \ln^2 x$, για κάθε $x > 0$

iv) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ Υπ. $x=1$ μοναδική λύση

7η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση που παρουσιάζει μέγιστο ίσο με M μόνο στο x_1 και παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με m μόνο στο x_2 , τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x) - f(\psi) = M - m \Leftrightarrow x = x_1 \text{ και } \psi = x_2$$

Απόδειξη

$$[M - f(x)] + [f(\psi) - m] = 0 \quad (1)$$

Ισχύει $f(x) \leq M \Leftrightarrow M - f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in A$

$$f(\psi) \geq m \Leftrightarrow f(\psi) - m \geq 0, \text{ για κάθε } \psi \in A$$

Άρα από (1) $\Rightarrow M - f(x) = 0$ και $f(\psi) - m = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ και $\psi = x_2$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία – ακρότατα

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2x+1) - f(x^2-3x+1) = 1$

Λύση

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ και έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)		-	+	-
f(x)		↓	↑	↓
		min		max

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο όταν $x=-1$ με τιμή $f_{\min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$ και μέγιστο όταν $x=1$ με τιμή $f_{\max}=f(1)=\frac{1}{2}$.

ii) Η εξίσωση γράφεται $f(x^2-2x+1)-f(x^2-3x+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} - f(x^2-2x+1) + f(x^2-3x+1) + \frac{1}{2} = 0 \quad (1)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - f(x) \geq 0$, το ίσον ισχύει μόνο αν $x=1$

$f(x) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{2} \geq 0$, το ίσον ισχύει μόνο αν $x=-1$.

Άρα από (1) $\Rightarrow \frac{1}{2} - f(x^2-2x+1) = 0$, οπότε $x^2-2x+1=1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$

και

$f(x^2-3x+1) + \frac{1}{2} = 0$, οπότε $x^2-3x+1=-1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

Τελικά $x=2$.

Εφαρμογές

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{4\eta\mu x}{4-\sigma\upsilon\nu^2 x}$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία-ακρότατα

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $f(\pi x) - f(3\frac{\pi}{2}\eta\mu^2(\pi x)) = 2$, $x \in [0,2]$.

Υπ. i) $f_{\max}=f(\pi/2)=0$, $f_{\min}=f(3\pi/2)=-1$ ii) $x=1/2$.

2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία - ακρότατα τη συνάρτηση

$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2-2x+1) - f(x^2-5) = 4.$$

3. Να λυθεί η εξίσωση $e^x + e^{-x} = x^2 + 2$

Υπ. $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$, $f_{\min} = f(0) = 0$, $x = 0$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

ii) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε τα α, β ώστε να ισχύει

$$e^\alpha(\beta - \ln \beta) + \beta(e^\alpha - \alpha) = \frac{2e}{e-1} (e^\alpha - \alpha)(\beta - \ln \beta)$$

Υπ. i) $D_f = \mathbb{R}$ ii) $f_{\min} = f(1) = \frac{e}{e-1}$ iii) $f(\alpha) + f(\beta) = \frac{2e}{e-1}$ $(\alpha, \beta) = (1, e)$

8η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, παρουσιάζουν μόνο στο x_0 μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα με την ίδια τιμή, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_0$

Παράδειγμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x^2} - 1$ και $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων και στη συνέχεια να

λύσετε την εξίσωση $\frac{x^2}{x^2 + 1} + 1 = \frac{1}{e^{x^2}}$

Λύση

Είναι $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f'(x)$		+	-	
$f(x)$		↑	↓	

$$\text{Max } f_{\max} = f(0) = 0.$$

Επίσης $g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

$g(x)$	$\downarrow$	-
$\text{Min } g_{\min} = g(0) = 0$		

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα : $g(x)=f(x) \Leftrightarrow x=0$, αφού για κάθε $x \neq 0$

Είναι $f(x)<0$ και $g(x)>0$.

Εφαρμογή

Αν $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ και $g(x) = \ln(1-x^2)+1$, να βρείτε τα ακρότατα των f, g και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=g(x)$$

Υπ. $f_{\min} = f(0)=1$ και $g_{\max} = g(0)=1$, $x=0$.

9η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή (ή κοίλη) σε διάστημα Δ και η ευθεία $\psi = \alpha x + \beta$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \Delta$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha x + \beta$ έχει μοναδική λύση την $x = x_0$, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία :

$$f(x) = \alpha x + \beta \Leftrightarrow x = x_0$$

1ο Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - \ln x$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή

ii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(1, 1)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση : $3x + 2 = 3e^x - f(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

i) Είναι $f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = 12x^2 + \frac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ii) $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$ και η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1, 1)$ είναι :

$$\psi - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow \psi = 3x - 2$$

iii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$f(e^x - x) = 3e^x - 3x - 2 \Leftrightarrow f(e^x - x) = 3(e^x - x) - 2 \Leftrightarrow f(\psi) = 3\psi - 2, \text{ όπου } \psi = e^x - x$$

$$\text{και θα πρέπει } \psi = 1 \Leftrightarrow e^x - x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

2ο Παράδειγμα

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x + 2$, αν f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Λύση

i) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι :

$$\psi - 1 = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \psi = f'(0)x + 1$$

$$\text{Όμως } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x} = \dots = 1/2$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$ είναι

$$\psi = \frac{1}{2}x + 1.$$

ii) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 0$

3ο Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, κυρτή και συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \ln(x+e)}{x} = 2 - \frac{1}{e}, \text{ τότε}$$

i) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 0$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^3) + f(x^2) = 2(x^3 + x^2 + 1)$

Λύση

$$i) \quad \text{Θέτουμε } \frac{f(x) - \ln(x+e)}{x} = g(x), \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 - \frac{1}{e}$$

Επειδή f συνεχής στο $x_0=0$ είναι $f(0)=\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0} [xg(x)+\ln(x+e)]=1$

$$f'(0)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)+\ln(x+e)-1}{x}=\lim_{x \rightarrow 0} \left[g(x)+\frac{\ln(x+e)-1}{x}\right]=2$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=0$, είναι

$$\psi-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow \psi=2x+1$$

ii) Επειδή η f είναι κυρτή θα είναι $f(x) \geq 2x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$. Έτσι θα έχουμε:

$f(x^3) \geq 2x^3+1$ (1) και $f(x^2) \geq 2x^2+1$ (2) και τα ίσον ισχύουν μόνο όταν $x^3=0$ και $x^2=0$ δηλαδή μόνο όταν $x=0$.

Άρα για κάθε $x \neq 0$ από (1)+(2) $\Rightarrow f(x^3)+f(x^2) > 2(x^3+x^2+1)$.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Εφαρμογές

1. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $2(F(x)-f(x))=f^2(x)$

Για κάθε $x > 0$, όπου f μια αρχική της f στο $(0, +\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι f γνησίως αύξουσα και F κυρτή.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2F(x)=2f(1)x+f^2(1)$

Υπ. i) $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1} > 0$ και $F'(x) = f(x) \uparrow$

ii) $x=1$

2. Δίνεται συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

* $xf'(x) = e^{-f(x)}$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και

* $f(e) = \ln 2$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(1+\ln x)$ και ότι η f είναι κοίλη.

ii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$ και να λύσετε την εξίσωση $f(1+f(x)) = f(x)$

Υπ. i) $(e^{f(x)})' = (\ln x)'$ ii) $\psi = x-1, x=1$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 7)$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Ναδειχτεί ότι η f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(0, 7)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x^2 + 4x + 7}{e^x} = 3x + 14 - e^{2x}(4x^2 - 8x + 7)$$

Υπ. i) $f''(x) = (x^2 + 1)e^{-x} > 0$ ii) $\psi = -3x + 7$ iii) $x = 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6
Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ Απόδειξη Έστω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$, ώστε $f(x) > 0$, τότε θα πρέπει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, άτοπο αφού από υπόθεση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$

Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\int_1^e f^2(x) dx = 4 \int_1^e x(f(x) - x) dx$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη (ή Να αποδείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.)

Λύση

Η δοθείσα σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\int_1^e f^2(x) dx = 4 \int_1^e x(f(x) - x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e (f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e (f(x) - 2x)^2 dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e g(x) dx = 0, \text{ όπου } g(x) = (f(x) - 2x)^2 \geq 0, x \in [1, e].$$

Σύμφωνα με την πρόταση 6, θα είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=2x$. Άρα
 $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$, άτοπο, αφού $x \in [1, e]$. Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και F μια αρχική της f στο $[0,1]$ με $\int_0^1 (f^2(x) + 6F(x)) dx = 6F(1) - 3$.

Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

Υπ. Παραγοντική ολοκλήρωση $\int_0^1 (f(x) - 3x)^2 dx = 0$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $\int_{1-x}^{e^x} f(t) dt = e^x + x - 1$

Λύση

Έστω F μια αρχική της f , οπότε θα έχουμε :

$$F(e^x) - F(1-x) = e^x + x - 1 \Leftrightarrow F(e^x) - e^x = F(1-x) - (1-x).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x) - x$, οπότε η εξίσωση γράφεται :

$$g(e^x) = g(1-x) \quad (1)$$

Είναι $g'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1 > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1, οπότε από (1) $\Rightarrow e^x = 1-x \Leftrightarrow x=0$, μοναδική λύση.

Εφαρμογή

Να λύσετε την εξίσωση $\int_{1-x}^{\ln x} f(t) dt = \ln x + x - 1$

Υπ. $x=1$

10^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΜΙΑ ΡΙΖΑ**

Σε πολλά θέματα ζητείται να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Αυτό επιτυγχάνεται συνήθως με ένα από τους παρακάτω τρόπους.

1. Με εφαρμογή θεωρήματος Bolzano

2. Με εφαρμογή του Θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

3. Με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle

4. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής

5. Με τη βοήθεια μονοτονίας -συνόλου τιμών

6. Με τη βοήθεια σταθερού προσήμου της f

7. Με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μέγιστης -Ελάχιστης Τιμής

1ο παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2+3x=e^x+1$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

Λύση (Με θεώρημα Bolzano)

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα : $x^2+3x - e^x-1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2+3x - e^x-1$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα των συνεχών x^2+3x

και $-e^x-1$. Επίσης $f(0)=-2<0$ και $f(1)=3-e>0$, δηλαδή $f(0)f(1)<0$.

Άρα σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$, ώστε $f(x_0)=0$

Εφαρμογή

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g , για τις οποίες ισχύουν

$*f(x)<1<2g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$*Υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ και $f(\alpha)=2\alpha$ και $g(\beta)=\beta$.$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)g(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) .

2ο παράδειγμα (Με Θ.Bolzano)

Δίνεται συνάρτηση $f:[2,3]\rightarrow\mathbb{R}$, συνεχής με $\frac{f^2(2)+f^2(3)}{2}=-f(2)f(3)$.

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη στο $[2,3]$. (ή ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[2,3]$).

Λύση

$$\text{Είναι } \frac{f^2(2)+f^2(3)}{2}=-f(2)f(3) \Leftrightarrow f^2(2)+f^2(3)=-2f(2)f(3)$$

$$\Leftrightarrow (f(2)+f(3))^2=0 \Leftrightarrow f(2)=-f(3).$$

Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ και $f(2)f(3)=-(f(3))^2\leq 0$.

α. Αν $f(2)f(3)=0$, τότε $f(2)=0$ ή $f(3)=0$, δηλαδή C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ ή στο σημείο $(2,0)$ ή στο σημείο $(3,0)$.

β. Αν $f(2)f(3)<0$, τότε από θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$.

Σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[2,3]$.

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\rightarrow\mathbb{R}$, συνεχής στο $[0,2]$ και $f(0)=f(2)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x)-f(x+1)$

ii) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=f(x+1)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

Υπ. i) $D_g=[0,1]$ ii) Θ.Bolzano για την g στο $[0,1]$

3ο παράδειγμα (Με Horner και Θ.Bolzano)

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+x^2=x^3+6x+5$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^4-x^3+x^2-6x-5=0$.

Αν $f(x) = x^4-x^3+x^2-6x-5$, επειδή $f(1)=0$, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Bolzano για την f στο $[1,2]$. Κάνουμε λοιπόν Horner για την f με ρίζα το 1.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & -6 & 5 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} * & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

$$\text{Άρα } f(x) = (x-1)(x^3+x-5) \quad (1)$$

Αν $g(x) = x^3+x-5$, τότε :

g συνεχής στο $[1,2]$

$g(1)=-3$, $g(2)=5$ και $g(1)g(2)=-15<0$. Σύμφωνα με Θ.Bolzano η $g(x)=0$, θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (1,2)$, ώστε $g(x_0)=0$. Για $x=x_0$ από την (1) παίρνουμε :

$f(x_0)=(x_0-1)g(x_0)=0$, δηλαδή η $f(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5-x^4-499x+500x-1=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,20)$.

4ο παράδειγμα (Με σταθερό πρόσημο και άτοπο)

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(-2)+f(0)+f(2)=0$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$. Άρα θα είναι $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε θα είναι ή $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν είναι $f(x) > 0$, τότε $f(-2)+f(0)+f(2) > 0$, άτοπο αφού από την υπόθεση $f(-2)+f(0)+f(2)=0$. Αν είναι $f(x) < 0$, τότε θα είναι

$f(-2)+f(0)+f(2) < 0$, άτοπο αφού από την υπόθεση $f(-2)+f(0)+f(2)=0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ θα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma$, με $a \neq 0$ και $5a+3\beta+3\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,2]$

Υπ. $f(0)+f(1)+f(2)=5a+3\beta+3\gamma=0$. Έστω $f(x) \neq 0$, καταλήγουμε σε άτοπο.

5ο παράδειγμα (Με θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{16}-\eta\mu(\pi x)+7$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{7}{2}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-4,4)$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-4,4]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$f(-4)=3$, $f(4)=11$, δηλαδή $f(-4) \neq f(4)$ και $f(-4) < \frac{7}{2} < f(4)$. Άρα σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-4,4)$ ώστε $f(x_0)=\frac{7}{2}$.

Εφαρμογή

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) \neq f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, ώστε $f(\xi)=\frac{f(1)+f(2)}{2}$.

6ο παράδειγμα (Με Θ. Μέγιστης -Ελάχιστης Τιμής και Θ.Ε.Τ.)

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και μη σταθερή στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $6f(x)=f(1)+2f(\frac{1}{3})+3f(\frac{1}{2})$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$

Λύση

Επειδή η f είναι συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση στο $[0,1]$, θα παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, δηλαδή θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0,1]$ ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$, με $m \neq M$ και $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως θα έχουμε :

$$m \leq f(1) \leq M \quad m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M \quad \text{και} \quad m \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq M \Leftrightarrow$$

$$m \leq f(1) \leq M \quad (1) \quad 2m \leq 2f\left(\frac{1}{3}\right) \leq 2M \quad (2) \quad \text{και} \quad 3m \leq 3f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 3M \quad (3)$$

$$\text{Από } (1)+(2)+(3) \Rightarrow 6m \leq f(1) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 6M \Leftrightarrow$$

$$m \leq \frac{f(1) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right)}{6} \leq M.$$

Αν $\frac{f(1) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right)}{6} \neq m, M$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq [0,1]$, ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(1) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right)}{6} \Leftrightarrow 6f(x_0) = f(1) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,10]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,10)$ τέτοιο ώστε :

$$11f(x_0) = f(0) + f(1) + \dots + f(10).$$

7ο παράδειγμα (Με θεώρημα Rolle)

Δίνεται η σχέση $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^3}{3} + \frac{\gamma x^2}{2} + \delta x$, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Η F είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και $F(0)=F(1)=0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (0,1) \text{ ώστε } F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \alpha \xi^3 + \beta \xi^2 + \gamma \xi + \delta = 0$$

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$, με $F(0)=0$ και $F(2)=4$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)F(x)=2x^3$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Υπ. Θ. Rolle για την $g(x)=F^2(x)-x^4$ στο $[0,2]$

8ο παράδειγμα (Με Θ.Μ.Τ και θεώρημα Rolle)

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(1)=\kappa+2\lambda$, $f(2)=2\kappa+3\lambda$ και $f(3)=3\kappa+4\lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$, ώστε $f''(\xi)=0$ (ή ότι η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,3)$).

Λύση

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1,2)$ ώστε $f'(\xi_1) = f(2)-f(1)=\kappa+\lambda$ και $\xi_2 \in (2,3)$ ώστε $f'(\xi_2) = f(3)-f(2)=\kappa+\lambda$.

Τώρα για την f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (1,3)$, άρα υπάρχει $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subseteq (1,3)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Εφαρμογή

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=f(0)+4$ και $f(4)=f(3)+2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,4)$.

Υπ. Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,2]$ και $[3,4]$ και Θ. Rolle για την f' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

9ο παράδειγμα (Με σύνολο τιμών και Θ. Ενδιάμεσων τιμών)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-5)+2x-2$, με $x>5$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2025$, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(5, +\infty)$.

Λύση

Για κάθε $x > 5$ ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x-5} + 2 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(5, +\infty)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι :

$(\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty)$. Το $2025 \in (-\infty, +\infty)$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (5, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 2025$.

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^7 + x^5 + 1 = 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα.

Υπ. $f(x) = 3x^7 + x^5 + 1$, f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

11^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ

Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, όπου f συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα, τότε:

i) Με ένα από τους τρόπους που αναφέραμε στην μεθοδολογία 10, θα αποδείχνουμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

ii) Με τη βοήθεια της μονοτονίας ή υποθέτοντας ότι η εξίσωση έχει και δεύτερη ρίζα, χρησιμοποιώντας το Θ. Rolle θα καταλήγουμε σε άτοπο.

1^ο παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x + 1 = e^{-x}$, έχει ακριβώς μια ρίζα, στο $\mathbb{R}$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $e^x + x + 1 - e^{-x} = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x + 1 - e^{-x}$, για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) = e^x + 1 + e^{-x} > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Το σύνολο τιμών της f είναι $(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Το $0 \in \mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$, που είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Εφαρμογές

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = \frac{1}{x}$, έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα

Υπ. $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, f γνησίως αύξουσα με σ.τ. $= \mathbb{R}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - e^{1-x}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική πραγματική ρίζα.

12^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Το ΠΟΛΥ ΜΙΑ ΡΙΖΑ

Υπάρχουν θέματα στα οποία ζητείται ναδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$, έχει το πολύ μία ρίζα στο (α, β) .

1^{ος} τρόπος εργασίας

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\rho_1 < \rho_2$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Με θεώρημα Rolle για την f στο $[\rho_1, \rho_2] \subset (\alpha, \beta)$ θα καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, 1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \rho$. Υποθέτουμε ότι η $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Είναι $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, f συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και f παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = 3x^2 - 3$. Άρα σύμφωνα με το Θ. Rolle θα υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (-1, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm 1$ άτοπο αφού $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subset (-1, 1)$.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $(1,2)$. Θέμα Πανελληνίων

2ος τρόπος εργασίας

Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα, όπως αυτό είναι εφικτό και με την βοήθεια της μονοτονίας θα αποκλείουμε την ύπαρξη και δεύτερης ρίζας.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 + 4x = 6 - \ln x$, $x > 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x - 6 + \ln x$, $x > 0$.

Είναι $f(1) = 0$, δηλαδή το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και επειδή $f'(x) = 4x + 4 + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Εφαρμογές

1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x-1) + f(x-2) = f(10-x) + f(11-x)$$

έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Υπ. $g(x) = f(x-1) + f(x-2) - f(10-x) - f(11-x)$, $g(6) = 0$, $g'(x) > 0$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + x = f^{-1}(-1) + 2$, έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0,1)$.

Υπ. $f^{-1}(-1) = 0$, Θ. Bolzano για την $f(x)$ στο $(0,1)$, $f'(x) > 0$.

13^η ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ**ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ**

Για να βρούμε το πλήθος των πραγματικών ριζών μιας εξίσωσης $f(x)=0$, όπου f συνεχής συνάρτηση ακολουθούμε την εξής πορεία:

i) Μελετούμε την μονοτονία της f και βρίσκουμε τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ στα οποία η f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Βρίσκουμε τα πλευρικά όρια των άκρων των $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ και λόγω συνέχειας θα βρίσκουμε τα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3), \dots$

iii) Σε όποια από τα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3), \dots, f(\Delta_i)$ ανήκει το 0, θα συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x)=0$, θα έχει μοναδική ρίζα στο αντίστοιχο Δ_i , όπου $i=1, 2, 3, \dots$

Συνολικά τώρα το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, είναι ίσο με το πλήθος των Δ_i , στα οποία υπάρχει ρίζα.

Παράδειγμα

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$x^2 - 2x = \ln x - x \ln x, x > 0.$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^2 - 2x - \ln x + x \ln x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x - \ln x + x \ln x$ με $x > 0$.

Είναι $f'(x) = 2x + \ln x - 1 - \frac{1}{x}$ με $f'(1) = 0$ και

$f''(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και η ρίζα $x=1$ είναι μοναδική για την $f'(x)=0$.

Έχουμε λοιπόν τον πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↓	↑

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$f((0,1]) = [-1, +\infty), \quad f((1, +\infty)) = (-1, +\infty)$$

Το $0 \in f((0,1]) = [-1, +\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1]$. Ακόμη το $0 \in f((1, +\infty)) = (-1, +\infty)$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μοναδική ρίζα στο $(1, +\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$, έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $(0, +\infty)$.

Εφαρμογή

Αν $|a| < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$, έχει ακριβώς 3 πραγματικές ρίζες.

Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\psi = \psi^x$, με $x, \psi > 0$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

ii) Να αποδείξετε ότι $f(4) = f(2)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$

Λύση

i) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		↑	↓

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(e, +\infty)$.

ii) $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$

iii) Για κάθε $x > 0$ η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^4 = 4^x \Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 4^x \Leftrightarrow 4 \ln x = x \ln 4 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow f(x) = f(4) \text{ ή}$$

$$f(x) = f(2) \quad (\text{αφού } f(4) = f(2))$$

Στο $(0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 οπότε η

$$f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2.$$

Στο $[e, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4.$$

Τελικά η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει 2 λύσεις $x=2$ και $x=4$.

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ με $x > -1$

i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία

ii) Να αποδείξετε την ισοδυναμία $(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1), x > -1$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)^2 = 2^{x+1}, x > -1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x=1$ και $x=3$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x^2+e-2)} = 1$

Υπ.iii) $f(x^2+e-2) = f(e-1)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Για να γίνει η παραπάνω εργασία πολύτιμη βοήθεια είχα από τα παρακάτω συγγράμματα:

1. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1 και 2 Χαρ. Στεργίου –Χρήστου Νάκη
2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄και Β΄ Τόμος Ν.Σπλήνης – Θανάσης Νικολόπουλος
3. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄Λυκ. Ολοκληρωμένη Επανάληψη Ανδρ.Πάτση-Πάυλος Τρύφων
4. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄και Β΄ Τόμος Ν. Ζανταρίδης-Ν.Καρπόζηλος-Σ Λαμπρακάκης
5. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄και Β΄ Τόμος Κ. Τηλέγραφος-Περικλής Παντούλας –Αθαν. Μίσκος
6. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄και Β΄ Τόμος Γ.Μιχαηλίδης
7. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄και Β΄ Τόμος Β.Παπαδάκης
8. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄και Β΄ Τόμος Αναστ.Μπάρλας
9. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Λυκ. Α΄ Τόμος Γ.Φραγκουλόπουλος

10.ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1-1 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ Στέλιος
Μιχαήλογλου-Δημήτρης Πατσιμάς- Ευάγγελος Τόλης